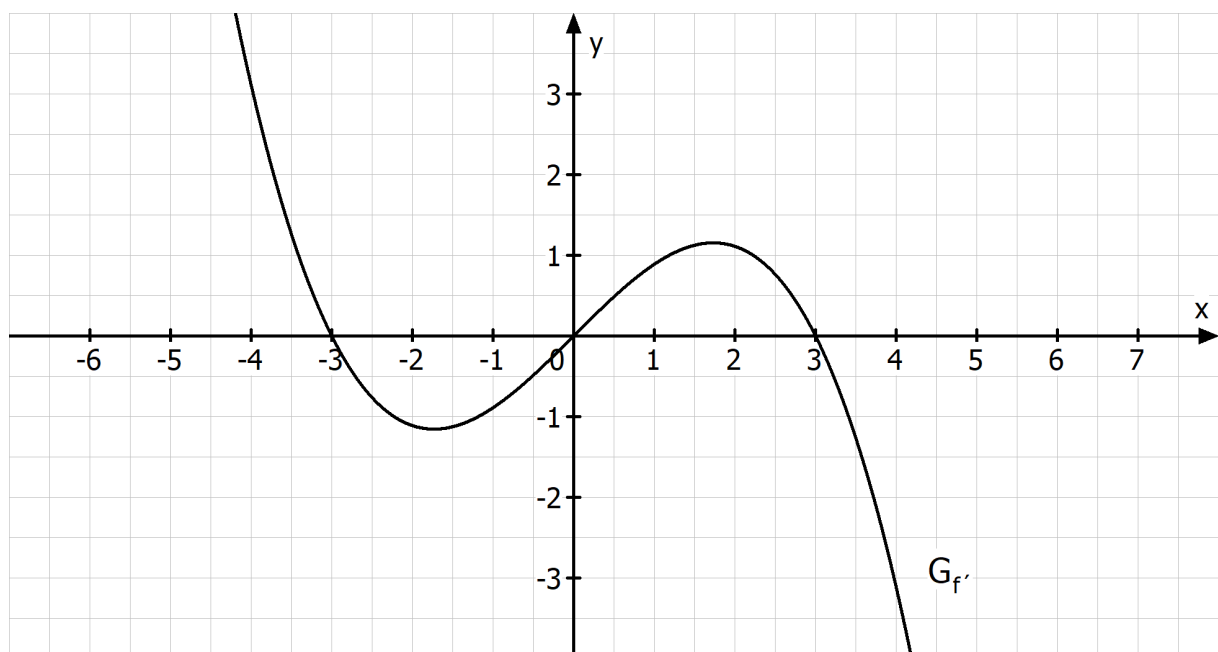
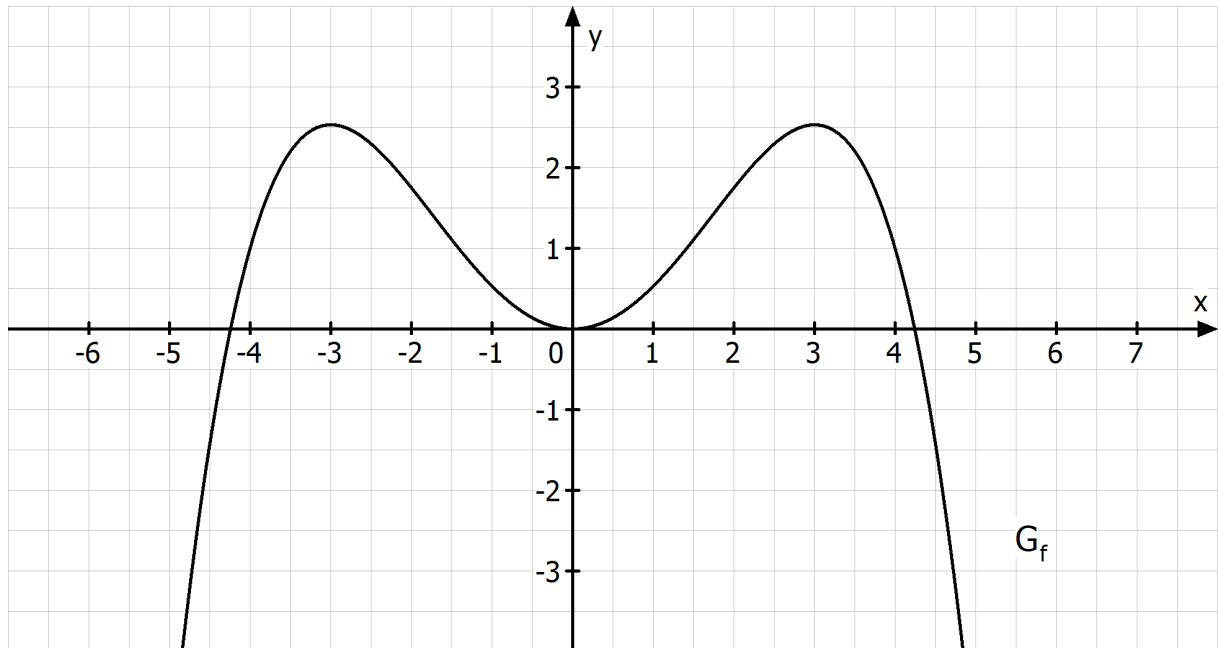


Zusammenhang zwischen den Graphen von f und f'

Beispiele:

- 1 Ermitteln Sie aus dem gegebenen Graphen von f möglichst genau den Graphen von f' . Bestimmen Sie dabei die Nullstellen von f' , das Vorzeichen von $f'(x)$ und die Extrempunkte von f' . Skizzieren Sie $G_{f'}$.



Nullstellen von f' : Extremstellen von G_f ablesen $x_1 = -3$ $x_2 = 0$ $x_3 = 3$

Vorzeichen von $f'(x)$: Monotonieverhalten aus Zeichnung ablesen

G_f sms in $]-\infty; -3]$ sowie in $[0; 3]$

G_f smf in $[-3; 0]$ sowie in $[3; \infty[$

Extremstellen von f' : aus der Zeichnung die Wendestellen von G_f ablesen

$x_1 = -1,7$ $x_2 = 1,7$

Monotonie und Extrempunkte von G_f' : aus der Zeichnung das Krümmungsverhalten von G_f ablesen

G_f rechtsgekrümmt in $]-\infty; -1,7]$ sowie in $[1,7; \infty[$

G_f linksgekrümmt in $[-1,7; 1,7]$

$\Rightarrow G_{f'} \text{ smf in }]-\infty; -1,7]$ sowie in $[1,7; \infty[$

$G_{f'} \text{ sms in } [-1,7; 1,7]$

$\Rightarrow x = -1,7$ lokales Minimum von $G_{f'}$

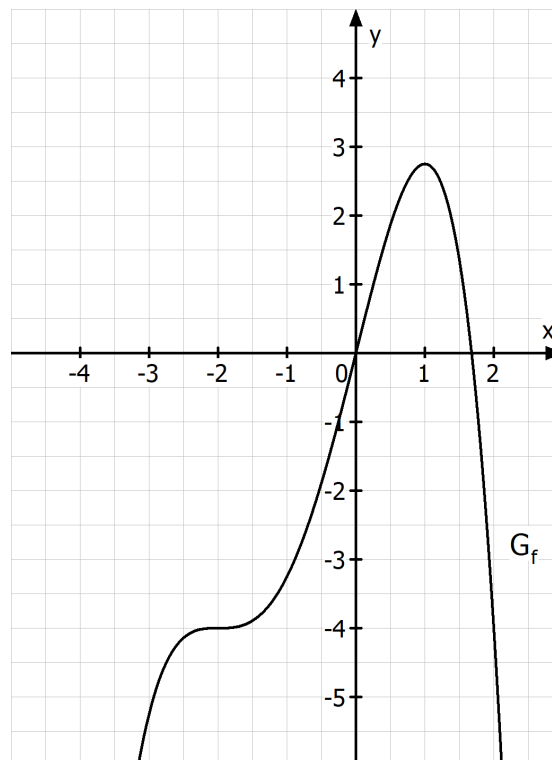
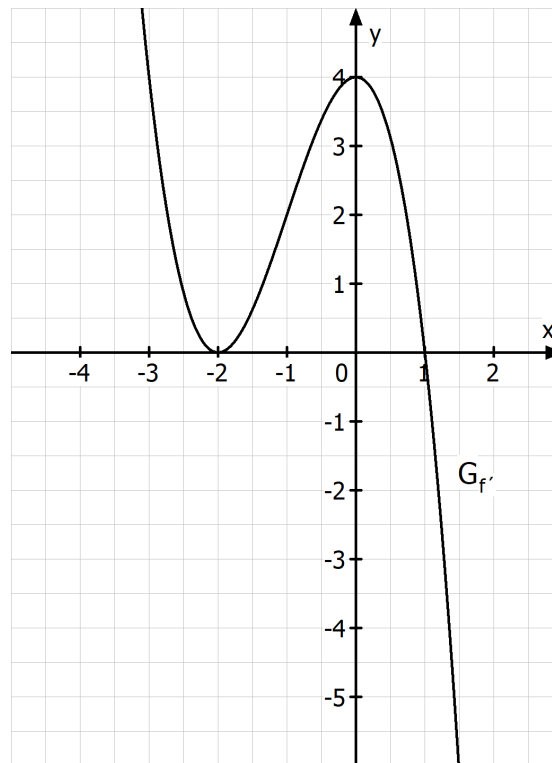
$x = 1,7$ lokales Maximum von $G_{f'}$

Mit dem Lineal skizzieren wir die Wendetangenten

bei $x = -1,7$ und $x = 1,7$ und lesen die Steigung

ungefähr ab $\Rightarrow \text{TIP}(-1,7/1,2)$ $\text{HOP}(1,7/-1,2)$

- 2 Ermitteln Sie aus dem gegebenen Graphen von f' möglichst genau den Graphen von f . Bestimmen Sie dabei das Monotonieverhalten, die Extremstellen und deren Art, das Krümmungsverhalten sowie die Wendestellen des Graphen von f . Skizzieren Sie G_f , wenn $f(0) = 0$ gilt.



Monotonieverhalten und Extremstellen von G_f :

Aus der Zeichnung lesen wir die Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ des Graphen von f' ab.

An diesen Stellen hat G_f eine waagrechte Tangente.

Der Graph von f' verläuft für $x < 1$ oberhalb der x-Achse, also steigt der Graph von f in diesem Bereich.

Für $x > 1$ verläuft der Graph von f' unterhalb der x-Achse, also fällt der Graph von f in diesem Bereich.

Also liegt bei $x = 1$ ein Hochpunkt vor.

Krümmungsverhalten und Wendestellen von G_f :

Aus der Zeichnung lesen wir das Steigungsverhalten des Graphen von f' ab.

Der Graph von f' fällt bis $x_1 = -2$ und steigt dann bis $x_2 = 0$ und fällt ab dann wieder.

Also ist $f''(x) < 0$ für $x < -2$ und $x > 0$ und $f''(x) > 0$ für $-2 < x < 0$.

G_f rechtsgekrümmt in $]-\infty, -2]$ sowie in $[0; \infty[$

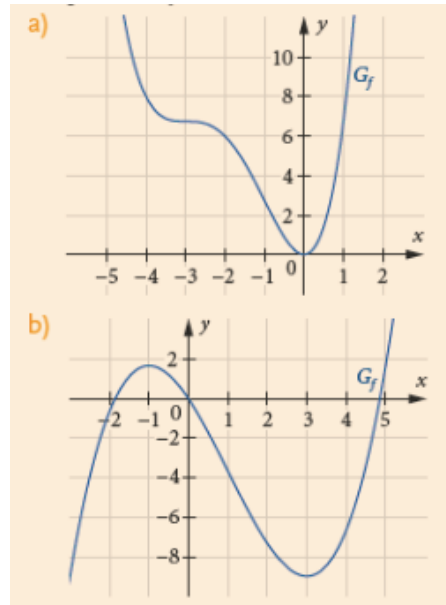
G_f linksgekrümmt in $[-2; 0]$

$x = -2$ und $x = 0$ Wendepunkte von G_f

Aufgaben:

1 Gegeben ist der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$.

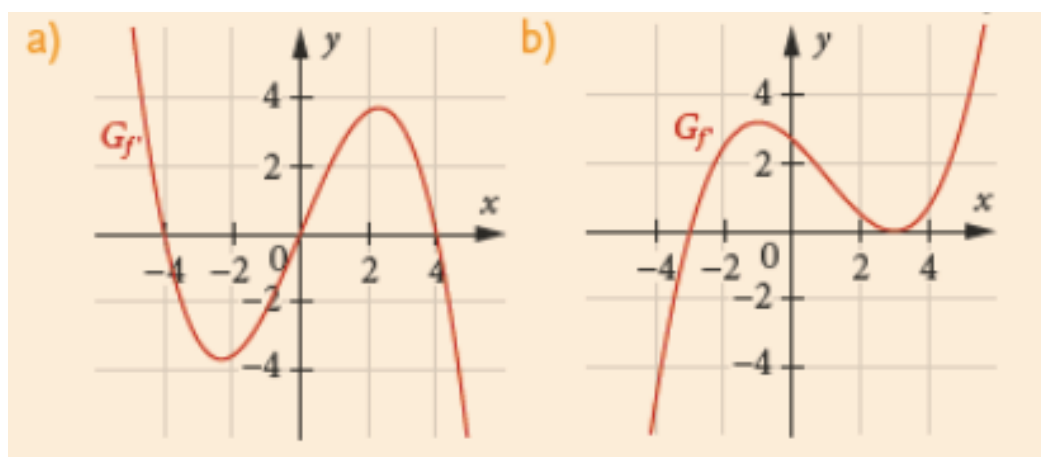
Bestimmen Sie für die Ableitung f' die Nullstellen und das Vorzeichen von $f'(x)$ sowie für den Graphen von f' möglichst genau das Monotonieverhalten und die Art und die Koordinaten der Extrempunkte. Skizzieren Sie den Graphen von f' (ohne Hilfsmittel). 



2 Gegeben ist der Graph $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' der ganzrationalen Funktion f mit $f(0) = 0$ und Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie anhand von $G_{f'}$ das Monotonieverhalten des Graphen G_f , die Extremstellen und deren Art, das Krümmungsverhalten sowie die Wendestellen.

Skizzieren Sie G_f (ohne Hilfsmittel). 



3.0 Entscheiden Sie begründet, welche der folgenden Aussagen über eine ganzrationale Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ wahr sind.

3.1 Ist x_0 eine einfache Nullstelle von f , so gilt $f'(x_0) \neq 0$. ☐

3.2 Jede doppelte Nullstelle von f ist eine einfache Nullstelle von f' . ☐

3.3 Jede einfache Nullstelle von f' ist eine doppelte Nullstelle von f . ☐

Lösungen:

1a)

Nullstellen von f' : $x_1 = -3$ $x_2 = 0$

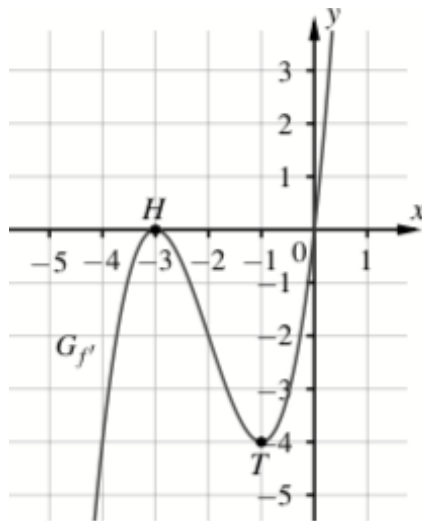
$f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty; -3[$ und für $x \in]-3; 0[$

$f'(x) > 0$ für $x \in]0; \infty[$

G_f hat bei $x_1 = -3$ und bei $x_2 = 0$ Extrempunkte und zwar nach dem Vorzeichen von $f'(x)$ bei $x_1 = -3$ einen Hochpunkt HOP(-3/0) und einen Tiefpunkt TIP(-1/-4), wenn man bei $x = -1$ an G_f die Steigung - 4 abliest.

G_f sms in $]-\infty; -3]$ sowie in $[-1; \infty[$

G_f smf in $[-3; -1]$



1b)

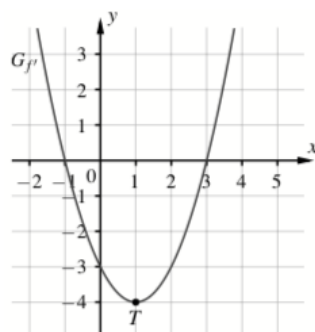
Nullstellen von f' : $x_1 = -1$ $x_2 = 3$

$f'(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -1[$ und für $x \in]3; \infty[$

$f'(x) < 0$ für $x \in]-1; 3[$

G_f hat bei $x = 1$ einen Extrempunkt und zwar nach dem Vorzeichen von $f'(x)$ einen Tiefpunkt TIP(1/-4), wenn man bei $x = -1$ an G_f die Steigung - 4 abliest.

G_f smf in $]-\infty; 1]$ und sms in $[1; \infty[$



2a)

Nullstellen von f' : $x_1 = -4$ $x_2 = 0$ $x_3 = 4$

$f'(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -4[$ sowie für $x \in]0; 4[$

$f'(x) < 0$ für $x \in]-4; 0[$ sowie für $x \in]4; +\infty[$

G_f smf in $]-\infty; -4[$ sowie in $]0; 4[$

G_f smf in $]-4; 0[$ sowie in $]4; \infty[$

$\Rightarrow G_f$ hat einen Hochpunkt bei $x = -4$ und $x = 4$

und einen Tiefpunkt bei $x = 0$

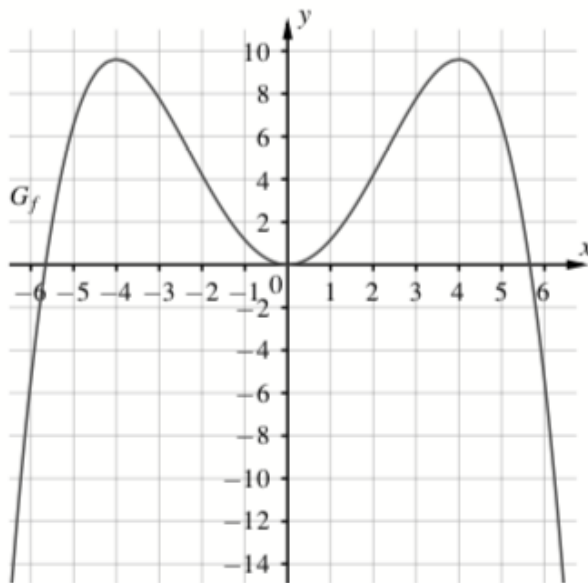
G_f smf in etwa $]-\infty; -2,4[$ sowie in $]2,4; \infty[$

G_f sms in $[-2,4; 2,4]$

$\Rightarrow G_f$ ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -2,4[$ sowie in $]2,4; \infty[$

G_f ist linksgekrümmt in $[-2,4; 2,4]$

$\Rightarrow G_f$ hat bei $x_1 = -2,4$ und bei $x = 2,4$ Wendepunkte



2b)

Nullstellen von $f': x_1 = -3 \quad x_{2/3} = 3$

$f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty; -3[$

$f'(x) > 0$ für $x \in]-3; 3[$ sowie für $x \in]3; +\infty[$

G_f smf in $]-\infty; -3]$

G_f sms in $[-3; \infty[$

$\Rightarrow G_f$ hat einen Tiefpunkt bei $x = -3$ und einen Terrassenpunkt bei $x = 3$

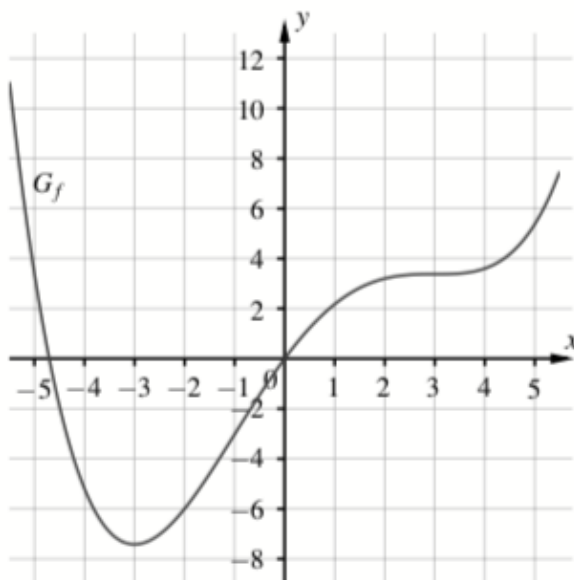
$G_{f'}$ sms in etwa $]-\infty; -1]$ sowie in $[3; \infty[$

$G_{f'}$ smf in $[-1; 3]$

$\Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt in $]-\infty; -1]$ sowie in $[3; \infty[$

G_f ist rechtsgekrümmt in $[-1; 3]$

$\Rightarrow G_f$ hat bei $x_1 = -1$ und bei $x = 3$ Wendepunkte



3.1

Aussage ist richtig.

Beispiel: $f(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$$f'(x) = 2x \quad f'(1) \neq 0 \quad f'(-1) \neq 0$$

3.2

Aussage ist richtig.

G_f hat bei x_0 einen Extrempunkt auf der x-Achse,
deshalb wechselt $f'(x)$ bei x_0 das Vorzeichen.

3.3

Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: $f(x) = x^2 + 1 \quad f'(x) = 2x \quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0$